

CAPÍTULO II

HIDRÁULICA SUBTERRÁNEA

Como ya se dijo antes, el movimiento del agua en el subsuelo, se realiza en dos estados de humedad diferentes: estado no saturado y estado saturado. El primero, en los estratos ubicados por encima del nivel freático y el segundo, por debajo del nivel freático.

2.1. HIDRÁULICA DEL SUELO NO SATURADO

Se describe aquí el movimiento del agua que queda en el suelo, inmediatamente luego de haberse liberado del agua gravitacional. En este estado, los poros gravitacionales se encuentran llenos de aire, vapor de agua y otros gases. Frente a ello, el agua en forma de humedad es obligada a moverse, debido a un gradiente hidráulico, siguiendo trayectorias muy erráticas.

El potencial hidráulico se origina por la resultante de la energía del campo gravitacional y la originada por la succión al perderse el agua desde los poros capilares; esto último se conoce como *potencial o tensión capilar* y se mide mediante el tensiómetro. La tensión capilar, varía con el contenido de humedad del suelo, desde cero en estado de saturación, hasta un máximo valor absoluto de aproximadamente 15 atmósferas en el estado de marchitez o de humedad higroscópica. En capacidad de campo, la tensión capilar es aproximadamente 0.33 atmósferas.

En consecuencia, la conductividad hidráulica en un suelo no saturado también depende del contenido de humedad y varía desde cero, en estado de humedad higroscópica, hasta un máximo valor en estado de suelo saturado.

El potencial hidráulico, se expresa matemáticamente por la ecuación (2.1).

$$\phi = z + \tau_{(\theta)} \quad (2.1)$$

Donde:

ϕ = Potencial hidráulico

z = Energía potencial, por unidad de peso

$\tau_{(\theta)}$ = Energía de tensión capilar, por unidad de peso

θ = Contenido de humedad del suelo (%).

Los poros gravitacionales llenos de aire reducen la sección transversal del flujo, aumentando la tortuosidad de las trayectorias recorridas. Por ello, la conductividad hidráulica es también función del contenido de humedad y se expresa como $K_{(\theta)}$, en vez de K para suelos saturados.

Ley de Darcy para suelos no saturados

La ecuación de Darcy, entonces para suelos no saturados toma la forma expresada por la ecuación (2.2).

$$\{q\} = -[K_{(\theta)}] \{J\} \tag{2.2}$$

Donde:

- $\{q\}$ = Vector caudal específico o de velocidades
- $[K_{(\theta)}]$ = Matriz de conductividad hidráulica
- $\{J\}$ = Gradiente del potencial hidráulico.

Tomando un elemento infinitesimal de suelo no saturado, como el de la Fig.1, referido a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales; se tiene que la ecuación de Darcy, para un suelo anisótropo heterogéneo, teniendo en cuenta la ecuación (2.2,) se llega a las expresiones (2.3).

$$q_x = -K_{(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad q_y = -K_{(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad q_z = -K_{(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2.3}$$

Ecuación de continuidad o de conservación de la masa

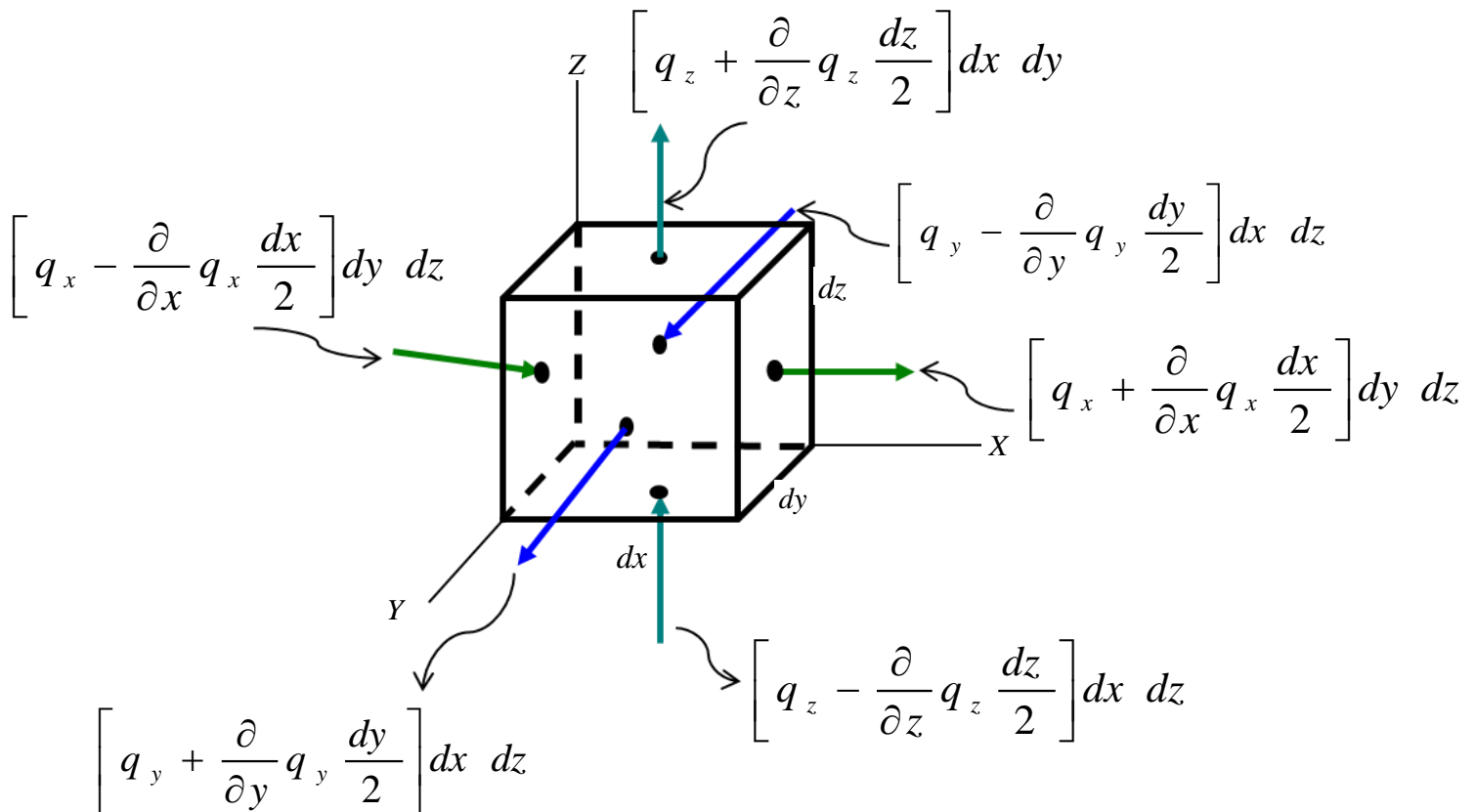


Fig.1.- Diagrama de un elemento infinitesimal de suelo no saturado, mostrando las masas entrantes y salientes al volumen de control

La ecuación de continuidad aplicada al volumen de control del elemento infinitesimal de suelo no saturado de la Fig.1, considerando que la masa entrante es mayor que la masa saliente y que, además el vector $\{q\}$ de la masa que ocupa momentáneamente el centroide crece gradualmente en el sentido positivo de los ejes coordenados, tal como se observa en la figura, se puede expresar mediante la sumatoria algebraica de la ecuación (2.4).

$$\begin{aligned} & \left(q_x - \frac{\partial}{\partial x} q_x \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(q_x + \frac{\partial}{\partial x} q_x \frac{dx}{2} \right) dy dz + \\ & \left(q_y - \frac{\partial}{\partial y} q_y \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(q_y + \frac{\partial}{\partial y} q_y \frac{dy}{2} \right) dx dz + \\ & \left(q_z - \frac{\partial}{\partial z} q_z \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(q_z + \frac{\partial}{\partial z} q_z \frac{dz}{2} \right) dx dy = \frac{\partial}{\partial t} (dx dy dz \theta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Efectuando operaciones y simplificando, teniendo en consideración que el volumen de control infinitesimal es indeformable, esto es que permanece constante, se llega a la expresión (2.5).

$$-\frac{\partial}{\partial x} q_x - \frac{\partial}{\partial y} q_y - \frac{\partial}{\partial z} q_z = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.5)$$

Reemplazando las expresiones (2.3) en la ecuación (2.5) el resultado es la ecuación (2.6).

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-K_{(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-K_{(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-K_{(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.6)$$

Finalmente, reemplazando las relaciones (2.1) en la ecuación (2.6), teniendo en consideración que z es independiente de (x, y) ; esto es que: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, el resultado es la ecuación (2.7).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{(\theta)} \frac{\partial \tau_{(\theta)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{(\theta)} \frac{\partial \tau_{(\theta)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{(\theta)} \frac{\partial \tau_{(\theta)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_{(\theta)}}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7), es la expresión más general para suelos no saturados anisótropos heterogéneos, en función de la conductividad hidráulica y del contenido de humedad del suelo. La misma expresión, en función de la difusividad, obtenida ésta multiplicando todos los términos del primer miembro por $\frac{\partial \theta}{\partial \theta}$ y haciendo cierto arreglo, se llega a la ecuación (2.8).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_{(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_{(\theta)}}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.8)$$

Donde:

$$D_{(\theta)} = K_{(\theta)} \frac{\partial \tau_{(\theta)}}{\partial \theta} \quad (2.9)$$

$D_{(\theta)}$ = Difusividad

Las ecuaciones (2.7) ó (2.8), se conocen como ecuaciones diferenciales de **Richards**, las que describen el movimiento de la humedad del suelo en la zona vadosa del subsuelo de las cuencas. Movimiento que tiene lugar, predominantemente, hacia arriba durante el proceso de secado o hacia abajo durante el proceso de humedecimiento (riego, lluvia natural o artificial).

En ambas ecuaciones, tanto la **conductividad hidráulica** como la **difusividad** son funciones del contenido de humedad del suelo y se obtienen en el campo y en laboratorio. La **difusividad** se define como la facilidad con que se mueve el agua a través de los poros capilares, en suelos no saturados.

Se recomienda que para corregir el efecto de **histéresis**, el segundo miembro de las ecuaciones (2.7) y (2.8), debe multiplicarse por el factor $\frac{\partial \tau_{(\theta)}}{\partial t}$.

La **histéresis** es la diferencia o discrepancia entre los valores de la tensión capilar, para el mismo contenido de humedad, obtenidos por secado (valores más altos) y humedecimiento de un mismo suelo.

El modelamiento matemático de cuencas en la zona no saturada es difícil y compleja por la gran cantidad de información requerida en, tanto en los límites de frontera, como en otros muchos puntos, y por la heterogeneidad y anisotropismo de los suelos que conforman el perfil litológico. Para ello se emplean los métodos numéricos en elementos finitos o diferencias finitas. Es más frecuente el modelamiento de acuíferos debido a que la cantidad de información requerida es mucho menor que para el modelamiento de la zona no saturada.

Para el Modelamiento de cuencas en la zona vadosa, se requiere dividir el campo en muchos elementos y aplicar los métodos numéricos mediante elementos finitos o diferencias finitas, cuya aplicación interactiva de las ecuaciones (2.7) ó (2.8) a cada elemento, permite la solución del problema. Ello implica, el conocimiento de mucha información de campo en muchos puntos.

2.2.HIDRÁULICA DE ACUÍFEROS O SUELOS SATURADOS.

Ecuación de Darcy

La ecuación de Darcy para un flujo unidireccional, a través de un medio poroso isotrópico homogéneo saturado, es:

$$Q_x = AK_x \left[\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta L} \right] = -AK_x \frac{\Delta \phi}{\Delta x} = -AK_x J_x \quad (3.1)$$

$$J_x = \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\phi = \frac{P}{\rho g} + z \quad (3.3)$$

- Q_x = Gasto que atraviesa la sección A del medio poroso
 K_x = Conductividad hidráulica en la dirección x
 J_x = Gradiente de potencial en la dirección x
 ϕ = Potencial hidráulico o carga piezométrica.

El gasto específico q de la ecuación 3.1, expresado en su modo vectorial, es:

$$q_x = -K_x \text{ grad } \phi_x = -K_x J_x \quad (3.4)$$

En general, la ecuación (3.4) puede escribirse para un medio poroso anisotrópico como:

$$\{q\} = -[K]\{J\} \quad (3.5)$$

- $\{q\}$ = vector caudal específico
 $\{J\}$ = vector gradiente de potencial
 $[K]$ = matriz de conductividades

Donde:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}; \quad \{J\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad \{q\} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Para un medio isotrópico homogéneo, la matriz de conductividades se transforma en:

$$[K] = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La conductividad hidráulica “ K ” y la permeabilidad “ k ” están relacionadas mediante la ecuación (3.8).

$$K = \frac{k * g}{\varrho} \quad (3.8)$$

- ϱ = viscosidad cinemática
 g = aceleración de la gravedad

k = permeabilidad.

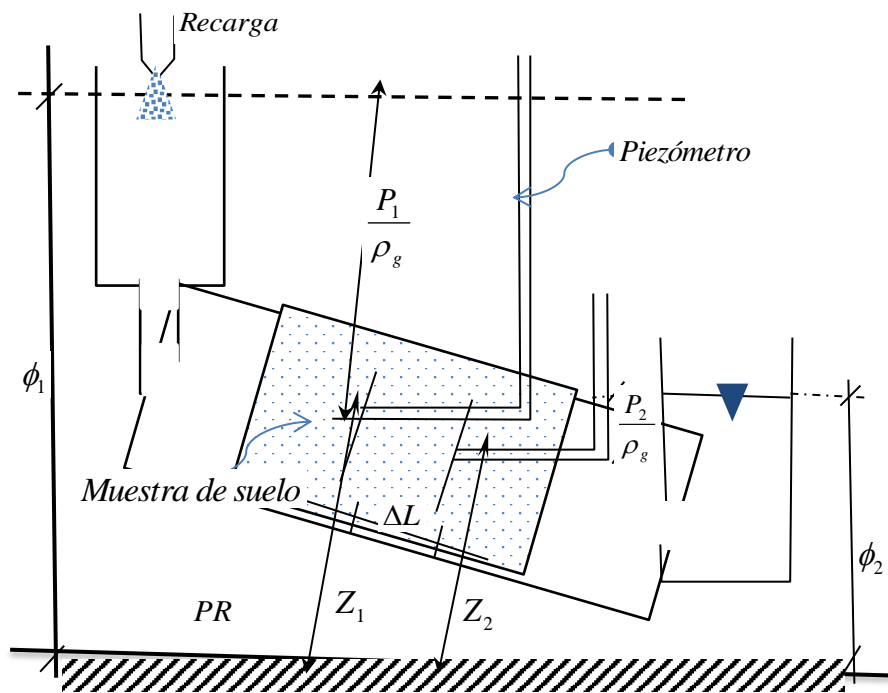


Fig.2.-Esquema de la experimentación de Darcy

Validez de la ecuación de Darcy

La ecuación de Darcy es válida para flujos cuyos números de Reynolds sean menores que 10. Los números de Reynolds deben obtenerse a partir de velocidades reales y de ninguna manera a partir de velocidades aparentes o de Darcy.

$$v_r = \frac{v}{n_e} \quad (3.9)$$

v_r = velocidad real

n_e = porosidad eficaz o espacio poroso drenable

v = velocidad aparente o de Darcy ($v = -K$)

La porosidad eficaz “ n_e ” sumada a la porosidad de retención “ n_r ” es equivalente al porcentaje de vacíos total “ n ” de la ecuación (3.10).

$$n = n_e + n_r \quad (3.10)$$

2.3. Ecuación de continuidad

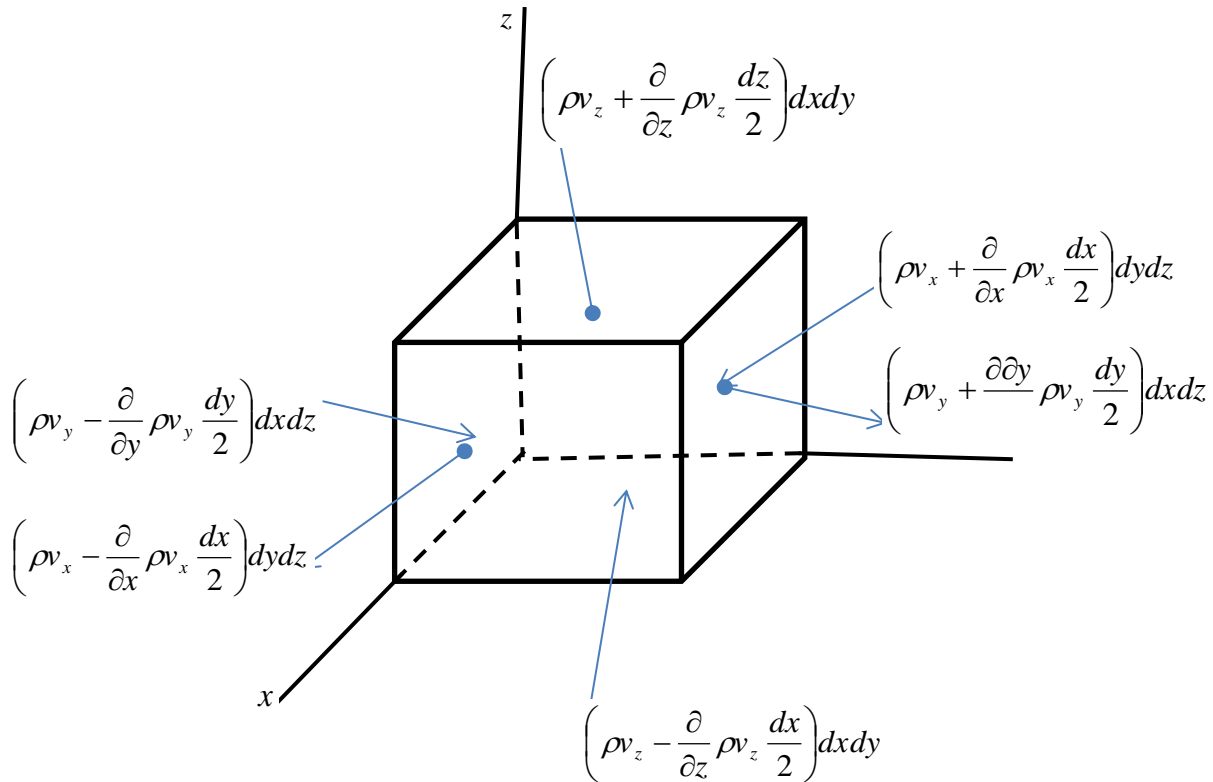


Figura 3.- Flujo tridimensional a través de un volumen de control infinitesimal de matriz sólida.

Bajo el supuesto de que el vector $\rho \bar{v}$, asociado a la masa que ocupa instantáneamente el centroide del volumen de control infinitesimal, varía gradualmente aumentando con la dirección positiva de los ejes coordenados; las masas instantáneas entrantes y salientes del volumen de control se pueden expresar en derivadas parciales, tal como se observa en la Fig. 3.1.

Aplicando la ecuación de la conservación de la masa al volumen de control infinitesimal de la fig. 3.1, suponiendo que la masa entrante es mayor que la masa saliente, en la unidad de tiempo, se obtiene la expresión (3.11).

$$\left(\rho v_x - \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x \frac{dx}{2}\right) dydz +$$

$$\left(\rho v_y - \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y \frac{dy}{2}\right) dxdz - \left(\rho v_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y \frac{dy}{2}\right) dxdz +$$

$$\left(\rho v_z - \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \frac{dz}{2}\right) dxdy - \left(\rho v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \frac{dz}{2}\right) dxdy = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz n) \quad (3.11)$$

Donde: v_x, v_y, v_z , son las componentes del vector velocidad de las partículas que pasan sucesivamente por el centroide del elemento infinitesimal; donde “ ρ ” es la

densidad del agua en el mismo punto y “ n ” es la porosidad drenable de la estructura granular.

Efectuando operaciones y simplificando, teniendo en cuenta que el volumen de control infinitesimal es constante por ser indeformable, se llega a la expresión (3.12)

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho n) \quad (3.12)$$

Efectuando las derivadas indicadas de la ecuación (3.12), se obtiene la ecuación (3.13).

$$-\left[\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] = \rho \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.13)$$

Finalmente, agrupando términos, se llega a la expresión (3.14).

$$-\left[\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] = \rho \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.14)$$

El primer y segundo términos del segundo miembro de la ecuación (3.14), expresan los efectos de la compresibilidad de la estructura granular y del agua, respectivamente.

Las variables que involucra la ecuación (3.14), son de naturaleza distinta, pero pueden expresarse todas ellas en función de la variable principal más importante, como es el potencial hidráulico: $\phi = z + \frac{P}{\rho g}$

Términos referidos al campo de velocidades

Los términos referentes al campo de velocidades, de acuerdo a la **ley de Darcy**, para medios porosos saturados anisótropos heterogéneos, en coordenadas cartesianas ortogonales, se expresa mediante las ecuaciones (3.15). Estas ecuaciones constituye el campo de velocidades o caudales específicos en las direcciones ortogonales consideradas.

$$v_x = -K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = -K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_z = -K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.15)$$

Términos referentes al gradiente de densidad

Los términos referentes al gradiente de la densidad del líquido, respecto a las direcciones ortogonales consideradas, pueden deducirse partiendo del módulo de

elasticidad volumétrico y por ende de la compresibilidad del agua, los mismos que se relacionan mediante la ecuación (3.16).

$$E_v = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} = \frac{1}{\beta} \quad (3.16)$$

Donde:

- E_v = módulo de elasticidad volumétrico del agua
- β = compresibilidad del agua
- P = presión intersticial
- ρ = densidad del agua.

Transponiendo términos en la ecuación (3.16), despejando y convirtiendo el diferencial total en derivadas parciales, teniendo en cuenta las direcciones principales del sistema cartesiano, se llega a las expresiones denotadas por el numeral (3.17).

$$d\rho = \beta \rho dp \cdot \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \beta \rho \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \beta \rho \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} = \beta \rho \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \quad (3.17)$$

De otro lado, el potencial hidráulico $\phi = z + \frac{P}{\rho g}$ convertido en diferencial total y

luego en derivadas parciales según las direcciones consideradas, teniendo en cuenta que “z” es independiente de (x, y), y tendiendo al límite en el punto, se obtienen las relaciones denotadas con el numeral (3.18).

$$d\phi = \frac{1}{\rho g} dP + dz : \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x} + 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial y} + 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial z} + 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Remplazando las relaciones (3.18) en las ecuaciones (3.17), se obtienen los gradientes de la densidad en función del potencial hidráulico, según las expresiones (3.19).

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \beta g \rho^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.19.a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \beta g \rho^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.19.b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \beta g \rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} - \beta \rho^2 g \quad (3.19.c)$$

Término referido a la compresibilidad de la matriz sólida

El término correspondiente a la rapidez de variación de la porosidad se obtiene analizando un elemento de dimensiones finitas de acuífero, tal como el representado por la Fig.4.

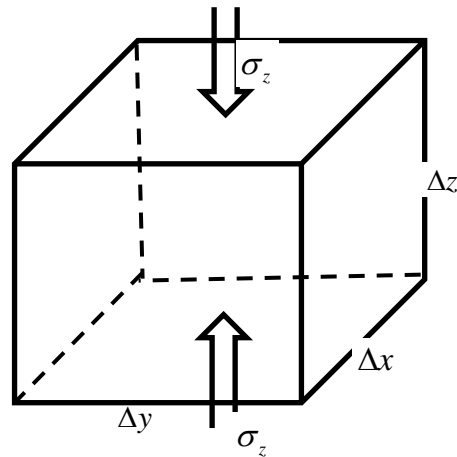


Fig.4.- Diagrama de cuerpo libre mostrando los esfuerzos principales o predominantes por efecto del peso de las capas o estratos superiores, despreciándose los efectos secundarios en el plano x, y.

Del elemento de dimensiones finitas de la Fig.4, se obtienen las relaciones existentes entre el volumen total, volumen poroso y volumen sólido de la manera siguiente:

Volumen total: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

Volumen de vacíos: $\Delta V_v = n \Delta x \Delta y \Delta z$ ($n = \text{porosidad drenable}$)

Volumen de sólidos: $\Delta V_s = \Delta x \Delta y \Delta z - n \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta x \Delta y \Delta z (1 - n) = Cte.$ (i)

Diferenciando la ecuación (i), manteniendo constantes Δx , Δy , según lo antes manifestado, y despejando el diferencial total “ dn ” se llega a la expresión (ii).

$$dn = \frac{1}{\Delta z} (1 - n) d\Delta z \quad (ii)$$

Convirtiendo la ecuación (ii) en forma de derivada parcial con respecto a la variable de interés (tiempo), se obtiene la ecuación (iii).

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\Delta z} (1 - n) \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \quad (iii)$$

La **ley de Hooke**, establece que el módulo de elasticidad (E) de la matriz sólida de la Fig.4, en función del esfuerzo normal (σ_z) y de la compresibilidad (α), se expresa mediante la ecuación (iv).

$$E = \frac{1}{\alpha} = - \frac{d\sigma_z}{\frac{d\Delta z}{\Delta z}} \quad (\text{iv})$$

En esta ecuación, $\frac{d\Delta z}{\Delta z}$, es la deformación vertical unitaria, debido al incremento infinitesimal de la presión intergranular del numerador.

Transponiendo términos en la ecuación (iv) y despejando el diferencial total de la dirección vertical de la matriz infinitesimal, se obtiene la expresión (v).

$$d\Delta z = -\alpha \Delta z \, d\sigma_z \quad (\text{v})$$

El diferencial total de la ecuación (v), convertido en forma de derivada parcial respecto a la variable de interés (tiempo), se convierte en la expresión (vi).

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} = -\alpha \Delta z \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \quad (\text{vi})$$

Sustituyendo la ecuación (vi) en (iii), se llega a la expresión (vii)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -(1-n)\alpha \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \quad (\text{vii})$$

Además, obviamente se establece que, en un mismo punto, la suma de la presión intersticial (P) del agua más la presión intergranular (σ_z) que ejerce la matriz sólida, debe ser una constante, o sea:

$$P + \sigma_z = \text{constante} \quad (\text{viii})$$

Diferenciando la ecuación (viii) y convirtiendo en forma de derivada parcial respecto a la variable de interés, se obtiene la expresión (ix).

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \quad (\text{ix})$$

Sustituyendo (ix) en (vii), se obtiene la expresión (x).

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (1-n)\alpha \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{x})$$

La presión intersticial (P) y el potencial hidráulico (ϕ), para las condiciones denotadas líneas arriba, están relacionados por el diferencial total de la expresión (3.17), o sea:

$$d\phi = \frac{1}{\rho g} dP$$

De donde, transformado a derivada parcial con respecto a la variable de interés, resulta la expresión denotada por el numeral (xi).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{xi})$$

Reemplazando la ecuación (xi) en la (x), se obtiene finalmente la variación de la porosidad con el tiempo, según la expresión (3.20).

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \rho g \alpha (1 - n) \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.20)$$

Término referido a la compresibilidad del agua

El término correspondiente a la compresibilidad del agua, se obtiene partiendo del diferencial total del módulo de elasticidad volumétrico de la ecuación (3.16), el mismo que transformando a la forma de derivada parcial, respecto a la variable de interés (tiempo), se llega a la expresión (xii).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \rho \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{xii})$$

Donde ρ es la densidad del agua, P la presión intersticial y β , la compresibilidad del agua.

Reemplazando la ecuación (xi) en la (xii), para expresarla en función del potencial hidráulico, se llega a la expresión (3.21).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho^2 \beta g \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.21)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.15), (3.19), (3.20) y (3.21) en la ecuación (3.14), despreciando los términos de segundo grado, se obtiene la ecuación (3.22).

$$\frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \pm \beta \rho g K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho g [\beta n + \alpha(1 - n)] \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) es la más general que puede escribirse para el movimiento de aguas subterráneas, en régimen no permanente a través de un medio poroso saturado anisótropo heterogéneo; con percolación ascendente, descendente o nula. El último término del primer miembro de la ecuación (3.22) representa la *percolación*; con signo negativo si es ascendente y positivo si es descendente. Si no existe percolación dicho término es nulo.

La ecuación (3.22) puede presentarse en función del almacenamiento específico (S_s), cuyo resultando es la expresión (3.23).

$$\frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta \rho K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.23)$$

Donde:

$$S_s = \rho g [\beta n + \alpha(1-n)]$$

S_s = almacenamiento específico
 ρ = densidad del agua
 g = gravedad terrestre
 β = compresibilidad del agua
 n = porosidad drenable del acuífero
 α = compresibilidad de la matriz sólida

Además, la ecuación general (3.22) ò (3.23) puede particularizarse para una serie de alternativas o modelos hipotéticos de flujo más simples, en concordancia con las características hidrodinámicas reales del acuífero que más se aproximen al modelo seleccionado.

Algunos casos particulares importantes de la ecuación (3.23)

Caso 1.- Flujo bidimensional en régimen no permanente, sin percolación, en un acuífero anisótropo homogéneo. La ecuación general queda modificada según la expresión (3.24).

$$K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.24)$$

Esta misma ecuación, en función de la transmisividad, multiplicando toda la ecuación por el espesor medio del acuífero.

$$T_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.25)$$

S = Coeficiente de almacenamiento
T = Transmisividad.

Caso 2.- Flujo bidimensional en régimen permanente, sin percolación, en acuífero anisótropo homogéneo.

$$K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.26)$$

La misma ecuación anterior, en función de la transmisividad, se convierte en la ecuación (3.27).

$$T_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.27)$$

Caso 3.- Flujo bidimensional en régimen no permanente, sin percolación, en acuífero isótropo heterogéneo.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.28)$$

La misma ecuación anterior, en función de la transmisividad, se transforma en la expresión (3.29).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.29)$$

Caso 4.- Flujo bidimensional en régimen permanente, sin percolación, en acuífero isótropo heterogéneo.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.30)$$

La ecuación anterior en función de la Transmisividad, se expresa mediante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.31)$$

Caso 5.- Flujo bidimensional, en régimen no permanente, sin percolación, en acuífero isotrópico homogéneo.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{S_s}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.30)$$

La misma ecuación anterior, en función de la transmisividad y del coeficiente de almacenamiento.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.31)$$

Caso 6.- Flujo bidimensional, en régimen permanente, sin percolación, en acuífero isotrópico homogéneo.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32), es el modelo matemático más simple de acuífero y es nada menos que la *ecuación de La Place* para el potencial hidráulico, cuya solución se define para cada caso en particular de flujo en acuífero isotrópico homogéneo.

Tanto, la ecuación general como cualquier otro modelo particular se resuelven mediante metodologías de los métodos numéricos con elementos finitos o diferencias finitas; para lo cual es menester información de campo.

El modelamiento de acuíferos de una cuenca se realiza, teniendo en cuenta registros históricos de información en diferentes puntos del campo y de frontera

TAREA N°01

PERMEÁMETRO DE DARCY

Construya un permeámetro de Darcy y encuentre la conductividad hidráulica de, por lo menos tres muestras diferentes de suelo. Cada muestra de diferente granulometría deberá estar acompañada de la curva granulométrica correspondiente. ¿Cómo, varía el porcentaje de vacíos gravitacionales con el coeficiente de uniformidad de las muestras?

TAREA N°02

ESTUDIO REGIONAL DEL ACUÍFERO DEL VALLE CAJAMARCA

Comprende las siguientes partes:

1. Delimitación de la cuenca de influencia y del acuífero del valle Cajamarca, a partir de los mapas IGN a escala 1/100 000.
2. Mediante los mapas de geología estructural regional, determinar el perfil litológico del valle en cortes longitudinales y transversales.
3. **Hidrología de superficie.** Determinar las variables de entrada (precipitación) y de salida (escorrentía directa, evapotranspiración real) y, mediante la ecuación de balance hidrológico, cuantificar la recarga.
4. A partir de la información anterior, determine los tipos de acuíferos y estime los parámetros hidrodinámicos de acuerdo a su naturaleza (uso de tablas).
5. Determinar el volumen total de agua subterránea del acuífero(s) y el volumen aprovechable.

NOTA.- La presentación de cada parte es secuencial y la fecha fijada es impostergable.

2.4. Teoría de las redes de flujo

El general, las redes de flujo nos permiten de manera sencilla, la obtención de la información muy importante, como la que se menciona a continuación:

- a. Interpretación sencilla del patrón de flujo, teniendo como base el concepto de **función de corriente**.
- b. Cuantificación del caudal de aguas subterráneas en el estudio de acuíferos o el caudal de infiltración a través de cualquier otro medio poroso saturado en ingeniería de drenaje.
- c. Determinación del caudal fluyente en cualquier vena líquida en general.
- d. Determinación del cálculo hidráulico de represamientos en diques de tierra, mediante el estudio del fenómeno de **tubificación** y sistema de drenaje.
- e. Cuantificación de la disipación de energía o pérdidas, en función del gradiente de **potencial hidráulico**.
- f. Determinación de las fuerzas de subpresión en estructuras hidráulicas rígidas de diversos tipos.
- g. Identificación de las zonas de recarga y de descarga de los acuíferos.
- h. Definición y materialización de la línea de “**divortio aquarum**” o divisoria de aguas en sistemas hidrológicos superficiales o cuencas hidrográficas.
- i. Permite definir y explicar la red de flujo superficial de escorrentía directa de manera sencilla.

2.4.1. Fundamento científico de la red de flujo

Imaginemos un conjunto de líneas de corriente “instantáneas”. Lo de instantáneas, entre comillas, significa en realidad un flujo estacionario o permanente, puesto que es demasiado lento y sostenido, con números de Reynolds menores de 10; conformando así un patrón de flujo fijo en el espacio por largos periodos de tiempo.

Función de corriente

Es aquella función de donde se deriva el **campo de velocidades**. Este concepto simplifica, en gran medida, la idea de línea de corriente, ya que intentar integrar la ecuación diferencial de la línea de corriente es bastante complicado, por no decir casi imposible. De otro lado, este concepto, permite obtener de manera muy sencilla el **caudal** y la disipación de **energía**.

El caudal específico que pasa a través de un elemento diferencial de la porción de curva, entre dos líneas de corriente consecutivas, ψ_i, ψ_{i+1} , se puede expresar mediante la ecuación (i).

$$dq = \bar{v} \cdot d\bar{A} \quad (i)$$

Donde:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} \quad (ii)$$

$$d\bar{A} = dA_x \bar{i} - dA_y \bar{j} = dy \bar{i} - dx \bar{j} \quad (iii)$$

Reemplazando (i), (ii), (iii) en (i), se tiene la ecuación (iv).

$$dq = v_x dy' - v_y dx \quad (\text{iv})$$

De la ecuación diferencial de la línea de corriente se establece que:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \text{ entonces: } v_x dy - v_y dx = 0 \quad (\text{v})$$

Comparando las ecuaciones (iv), (v), se concluye en la ecuación (vi).

$$dq = v_x dy - v_y dx = 0 \quad (\text{vi})$$

Lo que demuestra que el caudal “q” que pasa entre dos líneas de corriente consecutivas es constante. Esto significa que el caudal que pasa por cualquier curva entre los puntos de dos líneas de corriente consecutivas es el mismo y es independiente de las trayectorias que siguen las partículas. Ello implica, desde luego, que debe existir una función continua: $\varphi = \varphi(x, y)$, de donde provenga un diferencial total, como el de la ecuación (vii).

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \quad (\text{vii})$$

Esto demuestra que las relaciones (vi) y (vii) son idénticas y, por tanto, debe satisfacer la condición dada por la ecuación (viii).

$$dq = v_x dy - v_y dx = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{viii})$$

De donde, integrando y comparando términos se llega a las ecuaciones (3.33) y (3.34).

$$q = \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} d\varphi = \psi_i - \psi_{i+1} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -v_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_x \quad (3.34)$$

De la ecuación (3.33) se deduce que el caudal que pasa entre dos líneas de corriente consecutivas es constante e igual a la diferencia de los números que caracterizan a cada línea de corriente. Los números que caracterizan a cada línea de corriente, tienen la dimensión de caudal específico ($\text{m}^3/\text{s.m}$). También se supone que el movimiento principal ocurre en un plano (x, y), siendo idéntico en todos los planos paralelos.

En cuanto al campo de velocidades, de la ecuación (3.34), la **función de corriente** $\varphi = \varphi(x, y)$ permite obtener las componentes de la velocidad en cualquier punto del campo de flujo, en el plano (x, y).

Potencial hidráulico

El movimiento que realiza el agua subterránea, así como cualquier fluido que se mueve en cualquier otro medio, es un proceso disipativo de energía por lo que el **gradiente del potencial**, en este caso, juega un papel importante y de donde también se deriva el campo de velocidades. Tanto el potencial hidráulico, así como el campo de velocidades se expresan mediante las ecuaciones (3.35) y (3.36), respectivamente.

$$\phi = z + \frac{P}{\rho g} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y \quad (3.36)$$

Comparando las ecuaciones (3.34) y (3.36) se llega a establecer relaciones muy importantes en la **teoría de variable compleja**, conocidas como **funciones de Cauchy - Riemann**, las mismas que se expresan mediante las ecuaciones (3.37).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.37)$$

Derivando parcialmente la primera ecuación con respecto a “x” y la segunda con respecto a “y”, se tienen las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = +\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Sumando miembro a miembro las relaciones anteriores se llega la **ecuación de La place** para las líneas de corriente, denotada con el numeral (3.38).

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.38)$$

Igualmente, la **ecuación de La place** para el potencial hidráulico en acuífero isótropo homogéneo, dada por la expresión (3.32), es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Los diferenciales totales de las funciones $\varphi = \varphi(x, y)$, $\phi = \phi(x, y)$ referentes a la función de corriente y potencial hidráulico, respectivamente, se expresan mediante:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy$$

Dividiendo ambos miembros de estas expresiones por “dx”, teniendo en cuenta que las funciones $\psi = \psi(x, y)$; $\phi = \phi(x, y)$, son constantes para una misma curva, se tiene:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando la pendiente a la curva de ambas funciones, se obtienen las relaciones (3.39) y (3.40).

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \quad (3.39)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial\phi}{\partial y}} \quad (3.40)$$

Reemplazando en la ecuación (3.39) el equivalente de las funciones Cauchy-Riemann (3.37).

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = +\frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}}{\frac{\partial\phi}{\partial x}} \quad (3.41)$$

Comparando las ecuaciones (3.40) y (3.41), se observa que la pendiente a la curva de una de las funciones $\psi = \psi(x, y)$; $\phi = \phi(x, y)$, es equivalente a la inversa negativa de la otra, lo cual es propio de curvas mutuamente perpendiculares entre sí.

Conclusión.- El conjunto formado por las familias de líneas de corriente y líneas equipotenciales de un campo de flujo se denomina red de flujo y se caracteriza porque ambas familias son mutuamente perpendiculares entre sí, propiedad ésta que es fundamental para el trazo de la red de flujo en los estudios hidrogeológicos. La red de flujo se dibuja en un plano a escala adecuada; en base de lo cual se obtienen otras variables de mucha significación en el estudio de aguas subterráneas u otros estudios referentes a estructuras hidráulicas.

2.4.2. Trazo de la red de flujo

Como ya se manifestó antes, la red de flujo es un sistema conformado por las familias de curvas de líneas de corriente y líneas equipotenciales, mutuamente perpendiculares entre sí. En tal sentido, cualquier metodología de trazo de la red de flujo se basa en esta importante propiedad de ortogonalidad mutua entre ambas familias de curvas y en la solución de la ecuación de Laplace de las funciones correspondientes a cada caso, tales como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Donde:

$\psi = \psi(x, y)$: Función de la familia de curvas de líneas de corriente.

$\phi = \phi(x, y)$: Función de la familia de curvas equipotenciales.

Metodologías

La ecuación de Laplace se resuelve utilizando métodos gráficos y métodos numéricos. El punto de partida, para cualquier metodología, es la solución de la ecuación de Laplace para el campo o familia de curvas equipotenciales ($\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$). Una vez definido el campo de curvas equipotenciales, el campo de líneas de corriente se determina a partir de aquél, teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad de ambas familias de curvas.

- **Método gráfico**

La ecuación de Laplace de la función equipotencial y función de corriente quedan resueltas por la determinación de ambas familias de curvas mutuamente perpendiculares entre sí.

Las condiciones para el trazo mediante el método gráfico son:

a) ***Condiciones de ortogonalidad curvilínea***

El trazo debe tener en cuenta que las tangentes a cada intersección entre dos curvas de ambas familias deben ser perpendiculares entre sí.

b) Condiciones de frontera

Las fronteras son superficies de contacto o de separación entre: aguas libres y medios porosos saturados; estratos impermeables y medios porosos saturados; aguas libres y estratos impermeables.

- La frontera de contacto entre aguas libres y un medio poroso saturado filtrante, es siempre una “*superficie equipotencial*”. Esto es que, en cualquier plano vertical esta frontera es una línea equipotencial. Entiéndase por *línea equipotencial*, aquella línea continua que une todos los puntos de igual potencial hidráulico,
$$\phi = z + \frac{P}{\rho g}$$
. Téngase presente que la cota “z” se mide con respecto a cualquier plano de referencia arbitrario. Cuando se dibuja en un plano a escala, estas cotas casi siempre están referidas al nivel mar.
- La frontera de contacto entre un medio poroso saturado filtrante y un estrato impermeable, es siempre una “*superficie de corriente*”. Lo que quiere decir, que en cualquier plano vertical esta frontera es una “*línea de corriente*”.

Procedimiento

- i) Delimitar la zona de flujo que se desea estudiar.
- ii) Dibujar, como base de partida, las líneas de corriente y equipotenciales de frontera, en concordancia con las condiciones de frontera antes descritas y la propiedad de ortogonalidad.
- iii) Trazar las líneas de corriente y equipotenciales intermedias, cumpliendo la propiedad de ortogonalidad. Las líneas de corriente deben de trazarse de tal modo que, el caudal que pase por entre dos líneas de corriente consecutivas cualesquiera sea en mismo, “ Δq ”, en todo el sistema. Trazar las líneas equipotenciales, de tal manera que la caída de potencial entre dos líneas equipotenciales consecutivas cualesquiera sea la misma, “ Δh ”, en todo el sistema.
- iv) Para cumplir la anterior condición, implica obviamente que cada elemento de la malla de la red sea un cuadrado, a lo cual se denomina “*red de malla cuadrada*”.

Imaginemos que tomamos un elemento de la red de flujo de dimensión promedio “a” en el sentido del recorrido y “b” en la dirección transversal.

La ecuación de Darcy para este elemento de la red puede expresarse mediante:

$$v = K \frac{\Delta h}{a} \quad (i)$$

Donde:

v = Velocidad media

K = Conductividad hidráulica

Δh = Caída de potencial

a = Longitud de recorrido

Con lo cual, el caudal específico “ Δq ” que pasa entre dos líneas de corriente consecutivas se expresa mediante la ecuación (ii).

$$\Delta q = b K \frac{\Delta h}{a} \quad (ii)$$

Donde:

b = Ancho promedio

Entonces, el caudal total que pasa en todo el sistema de líneas de corriente es:

$$q = N_{\psi} \Delta q \quad (iii)$$

Donde:

q = Caudal total del sistema

N_{ψ} = Número de canales del sistema

Y la caída total entre la primera y última línea equipotencial estará dada por la expresión (iv).

$$h = N_{\phi} \Delta h \quad (iv)$$

Donde:

h = Caída total en el sistema

N_{ϕ} = Número de las caídas del sistema

Reemplazando las relaciones (iii) y (iv) en la ecuación (ii) se llega a la expresión (3.42).

$$q = \frac{b}{a} \frac{N_{\psi}}{N_{\phi}} K h \quad (3.42)$$

La relación (b/a) se denomina **factor de forma**, el mismo que define la geometría del patrón de flujo del sistema.

Para una malla de cuadrados curvilíneos o **malla cuadrada** (a=b), la ecuación (3.42) se convierte en la expresión (3.43).

$$q = \frac{N_{\psi}}{N_{\phi}} K h \quad (3.43)$$

Conclusión.- En consecuencia, el trazado de la red de flujo debe garantizar que cada elemento de la malla sea un cuadrado curvilíneo perfecto. En estas condiciones, la precisión y la exactitud del método gráfico dependerá de la densidad de la red de flujo; pues mientras más densa sea la red mayor será la precisión y viceversa.

- **Métodos numéricos**

Los métodos numéricos pueden ser de elementos finitos y de diferencias finitas. Se diferencia el uno del otro en el tamaño de cada elemento en que queda dividido el sistema en estudio.

Método de diferencia finita

En esta metodología, el tamaño de los elementos en que se divide el sistema en estudio son de dimensiones finitas relativamente grandes, a diferencia del tamaño infinitesimal de los elementos del método de elemento finito.

El método de diferencia finita se resuelve comúnmente mediante procedimientos interactivos o de aproximaciones sucesivas conocido como método de Relajaciones.

Método de relajaciones

Esta metodología, para la solución de la ecuación de Laplace, consiste en expresar las ecuaciones algebraicas en diferencias finitas mediante el empleo de series. El método de diferencia finita tiene las siguientes ventajas:

1. Se adapta a condiciones de frontera muy diversas, desde sencillas hasta muy complicadas.
2. Se adapta a condiciones muy variadas de anisotropía y heterogeneidad de medios porosos saturados filtrantes.

Como cualquier otra, esta metodología no proporciona una solución general de la ecuación de Laplace, aplicándose sólo para casos muy particulares.

Para un movimiento plano, la metodología consiste en lo siguiente:

- Formular la ecuación de Laplace, para la familia de curvas equipotenciales, bajo expresiones algebraicas, empleando la serie Taylor. La serie Taylor, aplicada a los nodos vecinos, tal como a los nodos (1) y (3), respecto a un nodo central "O" cualquiera, en

la dirección “x”, se refleja en las expresiones algebraicas (3.44) y (3.45).

Para el nodo 1:

$$h_1 = h_o + a \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_o + \frac{a^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_o + \frac{a^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)_o + \dots + \frac{a^n}{n!} \left(\frac{\partial^n h}{\partial x^n} \right)_o \quad (3.44)$$

Para el nodo 2:

$$h_3 = h_o - a \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_o + \frac{a^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_o - \frac{a^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)_o + \dots \quad (3.45)$$

Donde:

h = Potencial hidráulico

a = Tamaño o dimensión de cada elemento

➤ Establecer las condiciones que deben satisfacer los nodos, de acuerdo a su ubicación en la malla del área de estudio (nodos internos o de frontera).

- **Condición para un nodo intermedio**, debe satisfacer la ecuación (3.46).

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_o = 0 \quad (3.46)$$

O lo que es lo mismo:

$$h_o = \frac{1}{4}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \quad (3.46.a)$$

- **Condición para un nodo ubicado en una frontera impermeable**, debe satisfacer la ecuación (3.47).

$$\frac{h_1}{2} + h_2 + \frac{h_3}{2} - 2h_o = 0 \quad (3.47)$$

- **Condición para un nodo ubicado en la intersección de dos fronteras impermeables**, debe satisfacer la ecuación (3.48).

$$\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} - h_o = 0 \quad (3.48)$$

Procedimiento

El procedimiento para la solución de la ecuación de Laplace, mediante diferencia finita, se realiza de la manera siguiente:

- i) Delimitación de la zona de estudio, teniendo en cuenta las condiciones de frontera conocidas, con respecto a los potenciales hidráulicos.
- ii) Por simplicidad, dividir la zona de estudio en elementos cuadrados de dimensiones preestablecidas, teniendo en cuenta el tamaño del acuífero.
- iii) Definir o determinar las condiciones de frontera, en cada nodo, referente a los potenciales hidráulicos.
- iv) Suponer razonablemente los potenciales hidráulicos en los nodos interiores y de frontera de la malla; teniendo en cuenta la tendencia de variación, respecto a los nodos de frontera de potenciales hidráulicos conocidos.
- v) Corregir los valores de los potenciales supuestos en el paso anterior, debido a que las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) no serán satisfechas; por lo que el procedimiento deberá ser *interactivo convergente*. Esto implica que los residuos R_o , para cada nodo, deben determinarse mediante las ecuaciones (3.49), (3.50) y (3.51), según su ubicación.

Para nodos intermedios:

$$h_1 + h_2 + h_3 - 4h_o = R_o \quad (3.49)$$

Para nodos ubicados en una frontera impermeable:

$$\frac{h_1}{2} + h_2 + \frac{h_3}{2} - 2h_o = R_o \quad (3.50)$$

Para nodos ubicados en la intersección de dos fronteras impermeables:

$$\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} - h_o = R_o \quad (3.51)$$

- vi) Los valores de los residuos o errores se reparten de modo que se satisfagan las condiciones antes descritas, con lo cual se concluye la primera interacción.
- vii) Los valores de los potenciales corregidos, son los valores iniciales de la segunda interacción. Procediéndose de la misma manera, tantas interacciones, hasta lograr la precisión deseada. Esto es, cuando los residuos tiendan a cero en todos los nodos, con lo cual concluye el proceso.

Aplicaciones

1.- Cierta acuífero tiene un área de 100 Km², espesor medio 40.0 m, coeficiente de almacenamiento 0.0006 y una porosidad efectiva de 30%. Determinar la reserva total y la reserva aprovechable, sabiendo que es aceptable un descenso promedio de explotación sin causar distorsiones de 1.15 m. Considere una temperatura del agua de 20°C.

2.- Desde un acuífero libre se extrae permanentemente durante 40 días un caudal de 30 L/s; habiéndose notado que a causa de dicha extracción se ha producido un descenso del nivel freático de 1.50 m en 1.0 Km² de acuífero. Suponiendo que en todo el tiempo de extracción no se produjo recarga alguna, determinar el coeficiente de almacenamiento.

3.- Desde un pozo artesiano, de 20 pulgadas de diámetro, diseñado con 40 m de pre filtro, se bombea agua a razón de 20 L/s. El material del pre filtro se estima que tiene un diámetro promedio de canalículos de 0.80 mm y una porosidad efectiva del 15%. Determinar el régimen de flujo y la validez de la ecuación de Darcy. Suponga una temperatura del agua de 20°C.

4.- El esquema adjunto muestra un acuífero limitado por dos estratos impermeables, con condiciones de frontera especificados en la misma figura. Determinar:

- a) El caudal de aguas subterráneas en el acuífero.
- b) La posición de la superficie piezométrica
- c) La red de flujo, según método gráfico.

5.- El esquema adjunto muestra un sistema de drenaje subsuperficial, con las condiciones de frontera dadas, donde se supone que la intensidad de la lluvia mantiene permanentemente saturado el suelo isotrópico homogéneo de 50.8 m/día de conductividad hidráulica. Sin considerar el aporte de las aguas de escorrentía directa, determinar:

- a) El caudal de drenaje por cada 100 m de dren.
- b) La red de flujo, empleando métodos numéricos.
- c) La intensidad máxima de lluvia para no generar escorrentía directa.
- d) La infiltración básica del suelo.

Nota.- Los problemas enunciados quedan como tarea domiciliaria.