

# Solución de sistemas de ecuaciones lineales: Introducción y conceptos generales

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas  
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas  
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán \*

2011

## Resumen

Introducción. Conceptos generales. Métodos de solución basados en el álgebra matricial. Técnicas para mejorar las soluciones.

## 1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones son herramientas imprescindibles en la práctica de la Ingeniería. Se utilizan para modelos diversos fenómenos físicos que involucran una multitud de variables y que su comportamiento implica una estrecha relación entre ellas.

La solución de circuitos a través de las Leyes de Kirchhoff, el análisis estructural, la investigación de operaciones son sólo unos pocos ejemplos de la importancia que reviste el uso de los sistemas de ecuaciones.

## 2. Conceptos generales

La solución de un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto  $n$  de valores que satisfacen simultáneamente a un grupo de ecuaciones. En la solución de dicho sistema se presentan tres casos:

1. Que el sistema no tenga solución finita. Se dice entonces que el sistema es incompatible.
2. Que el sistema tenga solución finita única. En tal caso se dice que el sistema es compatible determinado.
3. Que tenga más de una solución. El sistema es entonces compatible indeterminado.

---

\*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

En este artículo se examinarán métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados que obedecen a la forma [1]:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\dots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & +\dots & +a_{nn}x_n & = & b_n
 \end{array} \tag{1}$$

En forma matricial este sistema se representa como:

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{2}$$

Donde: A es la matriz de coeficientes  $a_{ij}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$\bar{x}$  es el vector compatible de incógnitas:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

$\bar{b}$  es el vector compatible de términos independientes:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

### 3. Métodos de solución basados en el álgebra matricial

La técnica fundamental para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones es el de la *eliminación*; dicho proceso consiste en transformar el sistema original en sistemas equivalentes aplicando las tres operaciones fundamentales sobre las ecuaciones del sistema que son:

1. Intercambiar dos ecuaciones del sistema
2. Multiplicar una ecuación del sistema por un escalar diferente de cero

3. Multiplicar una ecuación del sistema por un escalar diferente de cero y sumar el resultado a otra ecuación del sistema.

Con base en estas tres operaciones fundamentales se definen varios métodos de solución. Cabe indicar que en el desarrollo de estos métodos y en la práctica de las operaciones se utilizan diversos recursos del álgebra matricial, entre ellos el uso de la matriz ampliada o la transformación hacia la matriz identidad. En este trabajo se muestran únicamente los planteamientos de los métodos sin ahondar en las técnicas que se prefieran en su solución.

## Método de Gauss

A través de las operaciones fundamentales aplicadas a la matriz de coeficientes  $A$  y al vector de términos independientes  $\bar{b}$  (para mantener la igualdad en las ecuaciones), se convierte a la matriz  $A$  en una matriz triangular superior donde la diagonal principal la constituyen números 1. Esta transformación implica que en la ecuación  $n$  aparezca una sola incógnita, dos en la ecuación  $n - 1$ , tres en la  $n - 2$  y así consecutivamente para después realizar una sustitución hacia atrás [1].

Sea el sistema de ecuaciones lineales  $A\bar{x} = \bar{b}$ , donde la matriz de coeficientes  $A$  corresponde a la forma de la matriz 3 y el vector de términos independientes  $\bar{b}$  corresponde al vector 5, la matriz ampliada del sistema es:

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \quad (6)$$

Por medio de las operaciones fundamentales debe transformarse en una matriz ampliada triangular superior de la forma:

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array} \right] \quad (7)$$

donde los valores  $a'_{ij}$  y  $b'_i$  son los coeficientes modificados por la aplicación de las operaciones fundamentales.

Este procedimiento se logra tomando cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz  $A$  original, al cual se le denomina *pivote* y después normalizando la ecuación con dicho valor. Posteriormente, a través de las operaciones fundamentales, se hace la eliminación de los elementos inferiores de la columna correspondiente al pivote.

Una vez realizada la transformación se realiza la sustitución hacia atrás obteniéndose el valor de cada una de las incógnitas.

## Método de Gauss-Jordan

Es una ampliación del método de Gauss con la diferencia que la matriz de coeficientes  $A$  se transforma en la matriz identidad de tal forma que se conserva una única incógnita por ecuación eliminando la sustitución hacia atrás.

Sea el sistema de ecuaciones lineales  $A\bar{x} = \bar{b}$ , donde la matriz de coeficientes  $A$  corresponde a la forma de la matriz 3 y el vector de términos independientes  $\bar{b}$  corresponde al vector 5 y la matriz ampliada corresponde al arreglo 6, por medio de las operaciones fundamentales debe transformarse en la matriz identidad de la forma:

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array} \right] \quad (8)$$

donde los valores  $b'_i$  son los coeficientes modificados por la aplicación de las operaciones fundamentales. De nuevo, el procedimiento utilizado es la elección del pivote, la normalización de las ecuaciones y la eliminación de los elementos superiores e inferiores de la columna del pivote correspondiente.

## Método de la matriz inversa

Es, en esencia, una analogía del método de Gauss-Jordan.

Sea el sistema de ecuaciones lineales  $A\bar{x} = \bar{b}$ , donde la matriz de coeficientes  $A$  corresponde a la forma de la matriz 3 y el vector de términos independientes  $\bar{b}$  corresponde al vector 5 y donde  $A^{-1}$  es la matriz inversa de  $A$ , se cumple que:

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} \quad (9)$$

## 4. Métodos para mejorar las soluciones

En los métodos de Gauss y Gauss-Jordan que se basan en el pivoteo pueden enfrentarse a ciertas dificultades cuando ecuaciones (en consecuencia dos renglones de la matriz ampliada) son muy parecidos o, en el peor de los casos, idénticos. Durante la aplicación de las operaciones fundamentales uno de estos renglones se volverá cero, es decir, se eliminará. Esto implica que el número de ecuaciones es  $n - 1$  el número de incógnitas y en consecuencia se trata de un sistema compatible indeterminado.

Esta situación es detectada por el álgebra matricial ya que el determinante de la matriz  $A$  será cero; la matriz  $A$  se denominará entonces *matriz singular*. No es posible eliminar la situación relativa a la matriz singular cuando el sistema emana de una situación tal.

Por otra parte, es imposible realizar la normalización utilizando al elemento ubicado en la diagonal principal cuando este es cero. Una manera de librar este obstáculo es intercambiar renglones para retirar de la diagonal principal elementos de valor cero. Sin embargo, en ocasiones los pivotes tienen

valores pequeños comparados al resto de los coeficientes del mismo renglón o bien, tiende a cero. Esta situación provocará errores de redondeo al efectuar la normalización.

Una opción para minimizar los efectos de esta situación es utilizar más cifras significativas en las cantidades durante los cálculos. Adicionalmente, es muy pertinente antes de realizar la normalización, ubicar el elemento de mayor valor disponible en la columna a la que pertenece el elemento pivote; los renglones se pueden intercambiar de tal forma que dicho elemento sea el elemento pivote [2]. A esta acción se le denomina *pivoteo parcial*. En cambio, si se realiza un procedimiento tal que tanto como en las columnas como en los renglones se ubica el elemento mayor en la diagonal principal, esto se conoce como *pivoteo total*. Resulta obvio establecer que la realización de los pivoteos parcial o total están sujetos a la estructura del sistema de ecuaciones [3].

Como se constatará en futuras definiciones, la relación entre los valores de los elementos pivote y el resto de los coeficientes que comparten el mismo renglón es determinante de la convergencia en métodos iterativos para solución de sistemas de ecuaciones. De hecho, a la prominencia en valor absoluto del elemento pivote sobre el resto de coeficientes de un mismo renglón se le denomina *criterio de la diagonal pesada* y se conforma de dos condiciones para obtener la solución buscada:

## 5. Criterio de convergencia

El método de Jácobi es susceptible de los efectos del pivoteo. En consecuencia, su criterio de convergencia lo conforman los criterios de la diagonal pesada, mismo que posee dos condiciones:

1. Condición necesaria: Es condición necesaria que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que el resto de los elementos de la misma ecuación.

$$|a_{ii}| > |a_{ij}| \quad (10)$$

2. Condición suficiente: Es condición suficiente que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que la suma del resto de los elementos de la misma ecuación.

$$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}| \quad (11)$$

En la medida que los elementos pivotes, que conforman la diagonal principal de la matriz  $A$  sea *más pesada*, mayor será la velocidad de convergencia de la solución iterativa.

## 6. Conclusiones

Los métodos anteriores suelen ser poco óptimos cuando el sistema corresponde a un orden superior a tres, si la solución se hace en forma manual; la situación es similar cuando se diseñan los respectivos algoritmos, principalmente por considerar la elección del pivote, la normalización y las tres operaciones fundamentales [4]. Adicionalmente, como se profundizará posteriormente, el valor del pivote es el factor determinante en la producción y propagación de errores.

El Análisis numérico proporciona herramientas que hacen de estos procesos herramientas más efectivas, ya sea como versiones alternas a los métodos basados en el álgebra matricial (Descomposición

LU) o como métodos iterativos (Métodos de Jácobi y de Gauss-Seidel) con sus correspondientes criterios de convergencia.

## Referencias

- [1] Douglas Burden, Richard. Faires. *Análisis Numérico*. 2002.
- [2] Raymond. Chapra, Steven. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. 1999.
- [3] Curtis F. Gerald. *Análisis numérico*. segunda edición edition, 1991.
- [4] Antonio. Schutz Fernando. Luthe, Rodolfo. Olivera. *Métodos numéricos*. 1985.